Pembelajaran 2. Aljabar dan Program Linear

A. Kompetensi

1. Menggunakan bentuk aljabar dan sistem persamaan untuk meyelesaikan masalah
2. Menggunakan matriks dan vektor untuk memecahkan masalah
3. Menerapkan program linear untuk memecahkan masalah

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bentuk-bentuk aljabar
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan danpertidaksamaan linear
3. Menyelesaikan masalah dengan sistem persamaan linear
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian atau invers matrik
5. Menyelesaikan masalah menggunakan vektor
6. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi
7. Membuat model matematika dari suatu masalah kontekstual
8. Menyelesaikan masalah program linear denganmetode grafik
9. Menyelesaikan masalah program linear dengan metode simpleks
10. Menyelesaikan masalah dualitas

C. Uraian Materi

1. Bentuk Aljabar dan Sistem Persamaan Linear

Bentuk Aljabar

Definisi 1.1

Bentuk Aljabar adalah suatu bentuk matematika yang dalam penyajiannya memuat huruf-huruf untuk mewakili bilangan yang belum diketahui.

Dalam suatu bentuk aljabar terdapat unsur-unsur aljabar, yang meliputi variabel (peubah), koefisien, konstanta, faktor, dan suku (suku sejenis dan suku tidak sejenis). Contoh bentukaljabaradalah sebagai berikut.

Contoh 1.1

a) $2x+1$ merupakan bentuk aljabar dengan variabel x, koefisien x adalah 2, dan konstanta 1.

b) $2x^2+8x^2y$ merupakan bentuk aljabar dengan variabel x dan y, koefisien x^2 adalah 2, koefisien x^2y adalah 8, dan tidak memuat konstanta.

Suku

Suku adalah bagian dari bentuk aljabar yang dipisah dengan tanda $-$ atau +.

Contoh 1.2

a) $9a+2b$ terdiri dari dua suku yaitu $9a$ dan $2b$.

b) $3n^2-2n-4$ terdiri dari tiga suku yaitu $3n^2, 2n$ dan -4.

Penyebutan untuk satu suku disebut suku tunggal, untuk dua suku disebut binom, untuk tiga suku disebut trinom, sedangkan suku banyak dinamai dengan polinom.

Faktor

Faktor adalah bilangan yang membagi bilangan lain atau hasil kali.

Contoh 1.3

Bentuk aljabar $m \times n \times o.$ atau mno memiliki faktor $m, n,$ dan $o.$.

Koefisien

Koefisien adalah faktor bilangan pada hasil kali dengan suatu peubah.

Contoh 1.4

$5n^3+2y-2$ adalah bentuk aljabar dengan 5 sebagai koefisien dari $5n^3$, sedangkan 2 adalah koefisien dari y.

Konstanta

Konstanta adalah lambang yang menyatakan bilangan tertentu (bilangan konstan / tetap) .

Contoh 1.5

$5n^3 + 2y - 2$ adalah bentuk aljabar dengan *-2* sebagai konstanta.

Suku sejenis dan tidak sejenis

Suku sejenis memiliki peubah dan pangkat dari peubah yang sama. Jika berbeda, disebut dengan suku tidak sama atau suku tidak sejenis.

Contoh 1.6

$2pq + 5pq$ merupakan bentuk aljabar suku sejenis, sedangkan $2xy + 3n$ merupakan bentuk aljabar suku tidaksejenis.

a. Operasi Bentuk Aljabar

Operasi hitung pada bentuk aljabar tidak berbeda dengan operasi hitung pada bilangan bulat, yakni penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Operasi hitung penjumlahan dan pengurangan suku aljabar dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan koefisien antara suku-suku yang sejenis.

Contoh 1.7

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar berikut ini.

a). $4x + 3y - 2x$

b). $5a^2b - 2b - 3a^2b$

Penyelesaian:

a). $4x + 3y - 2x = 4x - 2x + 3y = 2x + 3y$

b). $5a^2b - 2b - 3a^2b = 5a^2b - 3a^2b - 2b = 2a^2b - 2b$

Operasi hitung perkalian dan pembagian suku aljabar dilakukan dengan menggunakan sifat-sifat operasi hitung pada bilangan riil, yakni:

1) Sifat komutatif penjumlahan, yaitu a + b = b + a
2) Sifat asosiatif penjumlahan, yaitu a + (b + c) = (a + b) + c
3) Sifat komutatif perkalian, yaitu a × b = b × a
4) Sifat asosiatif perkalian, yaitu a × (b × c) = (a × b) × c

5) Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, yaitu: $a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c)$

Contoh 1.8

Tentukan hasil perkalian dan pembagian bentuk aljabar berikut ini.

a). $4x(3y + 2x)$

b). $(5a^2b - 2ab) : a$

Penyelesaian:

a). $4x(3y + 2x) = 12xy + 8x^2$

b). $(5a^2b - 2ab) : a = 5ab - 2b$

b. Perkalian antar Suku Bentuk Aljabar

Pada perkalian antar suku bentuk aljabar, kita dapat menggunakan sifat distributif sebagai konsep dasarnya.

Perkalian suku satu dengan suku dua atau suku banyak

Contoh 1.9

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan berikut:

a). $4x(3x + 2y)$

b). $8a(3ab - 2ab^2 - 8ab)$

Penyelesaian:

a). $4x(3x + 2y) = 12x^2 + 8xy$

b). $8a(3ab - 2ab^2 - 8ab) = 24a^2b - 16a^2b^2 - 64a^2b = -40a^2b - 16a^2b^2$

Perkalian suku dua dengan suku dua

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Contoh 1.10

Tentukan hasil dari $(x - 2y)^2$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(x - 2y)^2 &= (x - 2y)(x - 2y) \\ &= x^2 - 2xy - 2xy + 4y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2\end{aligned}$$

Selisih dua kuadrat

Contoh 1.11

Tentukan hasil dari $(x-3(x+3)$!!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(x-3(x+3) &= (x-3)(x+3)\\ &= x^2+3xy-3xy+9\\ &= x^2-9\end{aligned}$$

c. Pemfaktoran Bentuk Aljabar

Dalam suatu bentuk aljabar dapat ditentukan variabel, koefisien variabel, konstanta, faktor, dan suku. Bentuk *xy* merupakan perkalian dari *x* dengan *y,* sehingga dalam hal ini menjadi faktor dari *xy* adalah *x* dan *y.* Begitu juga dengan bentuk *a(x + y),* dimana faktor dari *a(x + y)* adalah *a* dan *(x + y).*Bentuk aljabar *x*+ *y* sebagai faktor dari bentuk *a(x + y)* mempunyai suku *x* dan *y*.

Untuk memfaktorkan bentuk aljabar dapat dilakukan dengan menggunakan hukum distributif. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari faktor persekutuan terbesar dari setiap suku aljabar.

Contoh 1.12

Faktorkanlah bentuk aljabar berikut ini!

a). $2x^2-8x^2y$

b). $12abc-15xyz$

c). $3x^2y-15xy^2z$

Penyelesaian:

a). $2x^2-8x^2y=2x^2(1-4y)$ (FPB dari $2x^2$ dan $8x^2y$ adalah $2x^2$)

b). $12abc-15xyz=3(4abc-5xyz)$

c). $3x^2y-15xy^2z=3xy(x-5yz)$ (FPB dari $3x^2y$ dan $15xy^2z$ adalah $3xy$)

Agar lebih memahami operasi bentuk aljabar, Saudara dapat membuka tautan berikut

https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Ope-rasi-pada-Bentuk-Aljabar-1-2011/konten1.html dan

https://sumberbelajar.belajar.-kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Operasi-pada-Bentuk-Aljabar-2-2011/kon-ten1.html.

Persamaan dan Pertidaksamaan

a. Persamaan

Definisi 1.2

Persamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan tanda hubung " = " (sama dengan).

Definisi 1.3

Persamaan linear dengan satu variabel (PLSV) adalah suatu persamaan yang memiliki satu variabel (peubah) dan pangkat tertingginya satu.

Bentuk umumnya **:** $ax + b = c, a \neq 0$ sebagai variabel.

Contoh 1.13

$8x - 9 = 15$ merupakan PLSV dengan variabel x.

Perhatikan bahwa suatu PLSV dapat bernilai benar atau salah bergantung pada nilai yang digantikan ke variabelnya. Oleh karena itu, dalam suatu PLSV dikenal yang namanya penyelesaian atau solusi.

Definisi 1.4

Penyelesaian (solusi) dari suatu PLSV adalah bilangan real yang menggantikan variabel sehingga persamaan tersebut menjadi bernilai benar.

Contoh 1.14

Tentukan solusi dari $8x - 9 = 15$

Penyelesaian:

Bentuk tersebut dapat diselesaikan menjadi:

$$8x - 9 = 15$$
$$\Leftrightarrow 8x = 24$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

Jadi solusi dari adalah 3.

Definisi 1.5

Persamaan linear dengan dua variabel (PLDV) adalah persamaan yang memiliki dua peubah dan pangkat tertingginya satu.

Bentuk umumnya**:** $ax+by=c; a\neq 0; b\neq 0$ dengan x dan y sebagai variabel.

Contoh 1.15

$3x+2y=7$ merupakan PLDV dengan variabel x dan y.

Perhatikan pula bahwa suatu PLDV dapat bernilai benar atau salah bergantung pada nilai yang digantikan ke variabelnya. Oleh karena itu, dalam suatu PLDV dikenal pula yang namanya penyelesaian atau solusi.

Definisi 1.6

Penyelesaian (solusi) dari PLDV $ax+by=c$ adalah bilangan terurut (x_1, y_1) sedemikian hingga jika disubstitusikan x_1 untuk *x* dan y_1 untuk *y* mengakibatkan persamaan menjadi bernilai benar.

Himpunan penyelesaian (HP) dari PLDV adalah himpunan semua bilangan terurut (x_1, y_1) yang merupakan solusi dari PLDV tersebut.

Perlu ditekankan bahwa $(x_1, y_1)\neq \{x_1, y_1\}$.

Contoh 1.16

Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari $3x+2y=7$.

Penyelesaian:

Diperoleh pasangan berurutan (x_1, y_1) dengan $y_1=\frac{7-3x_1}{2}$ untuk $x_1\in R$ merupakan solusi dari PLDV tersebut.

Jadi HP dari $3x+2y=7$ adalah $\left\{(x_1, y_1)|y_1=\frac{7-3x_1}{2}, x_1\in R\right\}$ atau dapat dituliskan sebagai $\left\{\left(x_1, \frac{7-3x_1}{2}\right)|x_1\in R\right\}$.

b. Pertidaksamaan

Mari kita ingat kembali persamaan linear. Persamaan linear satu variabel dinyatakan dalam bentuk $x=a$, dengan a suatu konstanta. Persamaan linear 2 variabel dapat disajikan dalam bentuk $y=mx+c$ atau $ax+by=c$ dengan $a, b, c,$ dan m merupakan suatu konstanta. Menurut El-khateeb (2016), pertidaksamaan adalah kalimat matematis yang dibangun dengan menggunakan satu atau lebih simbol $(<, >, \leq, \text{atau } \geq)$ untuk membandingkan

2 kuantitas. Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu. Pertidaksamaan linear satu variabel dinyatakan dalam bentuk $x < a$. Pertidaksamaan linear 2 variabel dapat dinyatakan dalam 2 bentuk yaitu $y < mx + c$ atau $ax + by < c$. Apakah tanda pertidaksamaan linear hanya $"<"$ saja? Ternyata tidak. Untuk tanda pada pertidaksamaan linear bisa berupa $<, >, \leq,$ atau $\geq$. Bentuk $x + 5 \leq 2x - 6$ dan $x - 3 > 9$, merupakan contoh pertidaksamaan linear satu variabel sedangkan bentuk, $2x - 5y \leq 10$ dan $-x + 2y \geq 5$ merupakan contoh pertidaksamaan linear dua variabel.

Menyelesaikan pertidaksamaan artinya mencari nilai dari variabel yang membuat hubungan dua kuantitas dalam urutan yang benar. Nilai dari variabel yang membuat pertidaksamaan menjadi kalimat yang benar disebut penyelesaian pertidaksamaan. Himpunan semua penyelesaian dari pertidaksamaan disebut himpunan penyelesaian pertidaksamaan.

Yuk ingat kembali. Penyelesaian untuk persamaan linear satu variabel merupakan suatu bilangan, penyelesaian persamaan linear dua variabel merupakan suatu titik. Bagaimana dengan penyelesaian pertidaksamaan linear?. Untuk mendapatkan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel dilakukan prosedur sebagai berikut.

a. Tambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
b. Kurangkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
c. Kalikan atau bagi kedua ruas dengan bilangan positif yang sama.
d. Jika mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik.

Contoh 1.17

Diberikan pertidaksamaan $-6x - 3 \geq 21$. Tentukan penyelesaiannya.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa:

$-6x-3 \geq 21$

$\Leftrightarrow \quad -6x-3+3 \geq 21+3$

$\Leftrightarrow \quad -6x \geq 24$

$\Leftrightarrow \quad -6x.-\frac{1}{6} \leq 24.-\frac{1}{6}$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{6}$ dan tanda pertidaksamaan dibalik menjadi $\leq$)

$\Leftrightarrow \quad x \leq -4$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \leq -4,\ x \text{ bilangan ganjil}\}$

Cek kebenarannya dengan mengambil beberapa bilangan

$x=-5$	$-6.(-5)-3=27 \geq 21$	Benar
$x=-5{,}5$	$-6.(-5{,}5)-3=30 \geq 21$	Benar
$x=-6$	$-6.(-6)-3=33 \geq 21$	Benar

Berdasarkan Contoh 1.17 di atas, himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel adalah himpunan bilangan yang membuat pertidaksamaan linear satu variabel menjadi kalimat yang benar.

Selanjutnya, bagaimana menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel? Sebelum dibahas prosedur menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel, didefinisikan dahulu **paruh bidang** (*half-plane*).

Definisi1.7

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dalam bentuk $ax+by<c$ terdiri dari titik-titik pada salah satu sisi garis yang didefinisikan dalam bentuk $ax+by=c$. Grafik pertidaksamaan linearnya disebut **paruh bidang** (half-plane)

Menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel dengan cara sebagai berikut.

a. Ubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan. Gambar garis l yang persamaannya $ax+by=c$ (putus-putus jika tanda $<$ atau $>$, tidak putus-putus jika tandanya $\leq$ atau $\geq$).

b. Ambil titik uji P yang tidak berada pada garis l dan cek apakah memenuhi pertidaksamaan. Jika titik *P* memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) yang memuat P. Jika titik *P* tidak memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) di sisi lain garis l.

c. Arsir daerah yang tidak memenuhi pertidaksamaan.

d. Himpunan penyelesaiannya dalam gambar berupa daerah sehingga disebut dengan daerah penyelesaian.

Contoh 1.18

Gambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear $2x+3y<12$

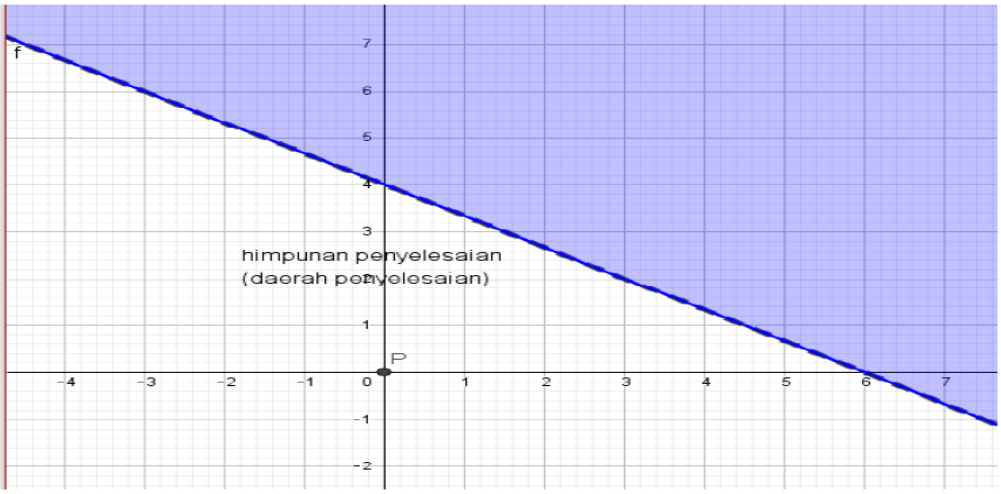
Penyelesaian:

Pertama ubah $2x+3y<12$ menjadi $2x+3y=12$

Kedua, gambar garis f yang persamaannya $2x+3y=12$

Ketiga, pilih titik uji $P(0,0)$. Substitusi $P(0,0)$ ke $2x+3y<12$

Diperoleh $0<12$, bernilai benar.



Gambar 10 himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir.

Berdasarkan Contoh 1.18 di atas, himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel adalah himpunan titik-titik yang membuat pertidaksamaan linear dua variabel menjadi kalimat yang benar.

Dua atau lebih pertidaksamaan linear dua variabel membentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Untuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel, bagaimana menentukan himpunan penyelesaiannya?. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah semua titik yang memenuhi semua pertidaksamaan dalam sistem pertidaksamaan tersebut. Langkah-langkah untuk menentukan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah sebagai berikut.

a. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan yang pertama.

b. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan yang kedua, dst

c. Himpunan penyelesaian (berupa daerah penyelesaian) sistem pertidaksamaan linear dua variabelnya adalah irisan dua daerah penyelesaian pada langkah 1 dan 2.

Contoh 1.19

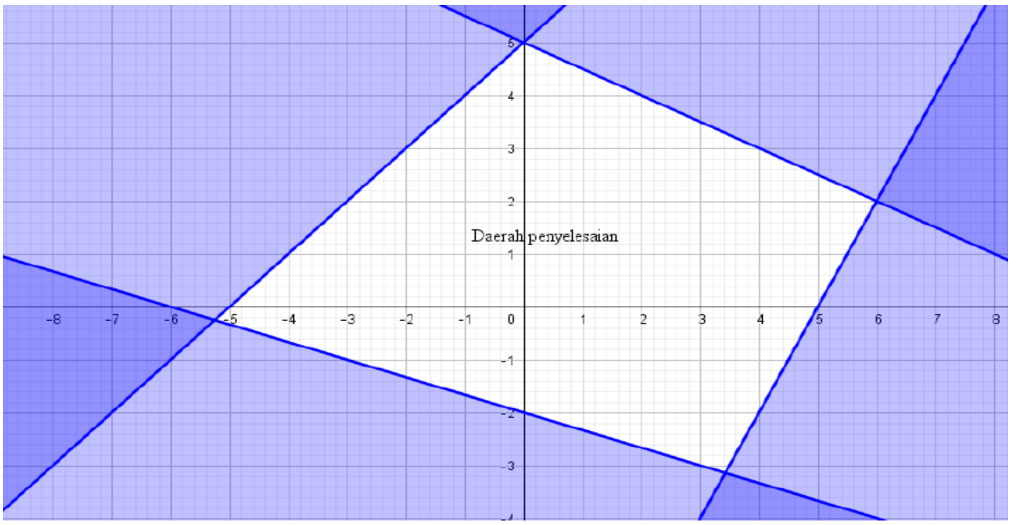
Dipunyai sistem pertidaksamaan linear dua variabel sebagai berikut.

$$\begin{cases} x + 2y \le 10 \\ -x + y \le 5 \\ 2x - y \le 10 \\ -x - 3y \le 6 \end{cases}$$

Gambarkan penyelesaiannya.

Penyelesaian:

Dengan menggambar grafik (garis lurus) dari setiap persamaan yang diketahui dan melakukan pengujian untuk suatu titik tertentu terhadap pertidaksamaan yang bersangkutan, maka diperoleh gambar penyelesaiannya adalah sebagai berikut.



Gambar 11 daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir.

Agar lebih memahami materi persamaan dan pertidaksamaan linear, Saudara dapat membuka tautan https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Persamaan-Linier-Satu-Variabel-PLSV--2012/konten1.html dan https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Penggunaan-Penyelesaian-PLSV-dan-PtLSV-2011/konten1.htmlhttps://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Penggunaan-Penyelesaian-PLSV-dan-PtLSV-2011/konten1.html

2. Sistim Persamaan Linear

a. Pengertian Sistem Persamaan Linear (SPL) dan solusi SPL

Definisi 1.8

Persamaan linear dengan n variabel adalah persamaan yang berbentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ bilangan-bilangan riil dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tidak semuanya nol.

Sistem persamaan linear (SPL) yang terdiri atas n persamaan dengan p variable

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \text{ berbentuk} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases} \qquad (*)$$

dengan a_{ij} dan b_i bilangan-bilangan real untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, p$

Bilangan-bilangan terurut (c1, c2, …, cp) disebut **penyelesaian (solusi)** untuk SPL (*) jika

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1p}c_p &= b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2p}c_p &= b_2 \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{np}c_p &= b_n \end{cases}$$

Bilangan-bilangan a_{ij} untuk setiap i=1,2,…,n dan j=1,2,…, p dalam (*) dinamakan koefisien variabel-variabel SPL, sedangkan biuntuk setiap i= 1,2,…,n dinamakan konstanta SPL.

Penggunaan tanda “{“ dalam (*) menunjukkan bahwa bentuk tersebut merupakan suatu sistem, artinya persamaan-persamaan tersebut saling terkait. Oleh karenanya dalam penulisan suatu SPL digunakan tanda “{“.

Terkadang “tanda kurung kurawal” diletakkan di bagian belakang, sehingga menggunakan tanda “}”.

Sebagaimana sistem persamaan yang sering dikenal yakni SPLDV (sistem persamaan linear dua variabel) dan SPLTV (sistem persamaan linear tiga variabel), maka bentuk umum SPLDV dan SPLTV dituliskan sebagai berikut.

$$\text{SPLDV dengan dua persamaan} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \dots \ (^{**})$$

$$\textit{atau} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

$$\text{SPLTV dengan } tiga \text{ persamaan} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \dots \ (^{***})$$

$$\textit{atau} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$$

Himpunan semua penyelesaian dari suatu SPL dinamakan Himpunan Solusi atau Himpunan Penyelesaian (HP).

Sebelum mempelajari materi pada kegiatan belajar ini, mahasiswa diminta memperhatikan [VIDEO SIMULASI SPL DALAM KEHIDUPAN SEHARI-HARI] pada https://www.youtube.com/watch?v=bhcbzG_d9r8

Contoh 1.20

Bentuk $\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 13 \\ 2x + y - 4z = -11 \end{cases}$, merupakan sistem persamaan linear tiga variabel dengan tiga persamaan. Bilangan terurut (2, -1, 3) merupakan solusi SPL tersebut.

Sedangkan himpunan penyelesaian SPL tersebut adalah HP={(2,-1,3)}.

Perhatikan bahwa HP suatu SPL merupakan himpunan, sehingga **tidak benar** jika himpunan penyelesaian SPL tersebut dituliskan dengan HP=(2,-1,3).

b. Jenis-jenis SPL

Dengan menggunakan matriks, maka

SPL $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3p}x_p = b_3 \end{cases}$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$ atau AX = B, dengan

$$A_{n\times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}, X_{p\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}, B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Berdasarkan SPL dalam bentuk AX=B, maka SPL dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu:

(1) SPL homogen, jika B=O.

(2) SPL non homogen, jika B $\neq$ O.

Berdasarkan solusi yang dimiliki oleh SPL, maka SPL dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu:

(1) SPL konsisten (consistent), jika SPL tersebut mempunyai solusi.

(2) SPL tak konsisten (inconsistent), jika SPL tersebut tidak mempunyai solusi.

SPL homogen pasti mempunyai solusi, yakni solusi nol yang berbentuk (0, 0, …, 0). Dengan demikian SPL homogen selalu konsisten.

Ada beberapa sifat yang terkait dengan SPL dalam bentuk AX=B, antara lain dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.1

Jika A matriks berukuran nxn, maka pernyataan berikut ekivalen.

(1) A invertible (mempunyai invers).

(2) SPL AX=O hanya memiliki solusi nol.

(3) SPL AX=B konsisten untuk setiap matriks B berukuran n×1.

(4) SPL AX=B memiliki tepat satu solusi untuk setiap matriks B berukuran n×1.

Bukti teorema ini diserahkan kepada Saudara sebagai latihan.

Teorema 1.2

Misalkan A matriks berukuran *m*×*n*, X matriks berukuran *n*×1, dan B matriks berukuran *m*×1.

(1) *Jika m*< n maka SPL AX=B mempunyai tak hingga banyak solusi.

(2) *Jika m = n* dan det(A)=0 maka SPL AX=O mempunyai solusi tak nol.

Bukti teorema ini diserahkan kepada Saudara sebagai latihan

Contoh 1.21

$SPL \quad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$, merupakan sistem persamaan linear konsisten dan hanya mempunyai solusi nol.

c. Metode Penyelesaian SPL

Ada beberapa cara (metode) yang sering digunakan untuk menentukan solusi dari suatu SPL, seperti **metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan metode gabungan (eliminasi dan substitusi)**. Khusus untuk metode grafik lebih tepat digunakan untuk SPLDV. Selanjutnya akan diberikan contoh penggunaan metode lainnya untuk SPLTV.

Pandang SPLTV berikut.

SPLTV dengan 3 persamaan $\begin{cases} a_{11}x_1 + \mathrm{a}_{12}x_2 + \ldots + \ \mathrm{a}_{1\mathrm{p}}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \mathrm{a}_{22}x_2 + \ldots + a_{2\mathrm{p}}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + \mathrm{a}_{32}x_2 + \ldots + \ \mathrm{a}_{3\mathrm{p}}x_p = b_3 \end{cases}$

1) Metode Substitusi

Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian SPLTV menggunakan metode substituasi adalah sebagai berikut.

(1) Pilih salah satu persamaan yang paling sederhana, kemudian nyatakan x_1 sebagai fungsi x_2 dan x_3, atau x_2 sebagai fungsi x_1 dan x_3, atau x_3 sebagai fungsi x_1 dan x_2.

(2) Substitusikan x_1 atau x_2 atau x_3 yang diperoleh pada langkah 1 ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga didapat PLDV.

(3) Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 2.

(4) Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah 3 ke salah satu persamaan semula sehingga diperoleh nilai variabel yang ketiga.

Contoh 1.22

Diketahui sebuah sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x + y - 2z = 4 \\ 7x - 6y - z = 10 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode substitusi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas kita dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1: Pilih salah satu persamaan yang paling sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi y dan z, atau y sebagai fungsi x dan z, atau z sebagai fungsi x dan y.

Misalkan kita pilih persamaan pertama dan kita nyatakan sebagai fungsi y dan z, diperoleh:

$$x - 2y + z = 6 \Leftrightarrow x = 2y - z + 6$$

Langkah 2: Substitusikan x atau y atau z yang diperoleh pada langkah 1 ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga didapat PLDV.

Substitusikan $x = 2y - z + 6$ ke persamaan $3x + y - 2z = 4$ dan $7x - 6y - z = 10$, diperoleh:

$$3(2y - z + 6) + y - 2z = 4$$
$$\Leftrightarrow 6y - 3z + 18 + y - 2z = 4$$
$$\Leftrightarrow 7y - 5z = -14 \qquad \text{.....}(1)$$

dan

$$7(2y - z + 6) - 6y - z = 10$$
$$\Leftrightarrow 14y - 7z + 42 - 6y - z = 10$$
$$\Leftrightarrow 8y - 8z = -32$$
$$\Leftrightarrow y - z = -4 \qquad .....(2)$$

Langkah 3: Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 2.

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{cases} 7y - 5z = -14 \\ \quad y - z = -4 \end{cases}$$

Nyatakan $y - z = -4$ ke bentuk $y = z - 4$.

Substitusikan $y = z - 4$ ke persamaan $7y - 5z = -14$, diperoleh:

$$7(z - 4) - 5z = -14$$
$$\Leftrightarrow 7z - 28 - 5z = -14$$
$$\Leftrightarrow \qquad 2z = 14$$
$$\Leftrightarrow \qquad z = 7$$

Substitusikan $z = 7$ ke persamaan $y = z - 4$, diperoleh: $y = 7 - 4 = 3$

Langkah 4: Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah 3 ke salah satu persamaan semula sehinga diperoleh nilai variabel yang ketiga.

Substitusikan $y = 3$ dan $z = 7$ ke persamaan $x = 2y - z + 6$, diperoleh:

$$x = 2(3) - 7 + 6 = 6 - 7 + 6 = 5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5,3,7)\}$

2) Metode Eliminasi

Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian SPLTV menggunakan metode eliminasi adalah:

(1) Eliminasi salah satu variabel atau atau sehingga diperoleh SPLDV.

(2) Selesaikan SPLDV yang didapat pada langkah 1.

(3) Substitusikan nilai-nilai variabel yang diperoleh pada langkah 2 ke dalam salah satu persamaan semula untuk mendapatkan nilai variabel yang lain.

Contoh1.23

Diketahui sebuah sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x+y-2z=4 \\ 7x-6y-z=10 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas, kita dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1: Eliminasi salah satu variabel atau atau sehingga diperoleh SPLDV.

$$x-2y+z=6 \quad \ldots\ldots\ (1)$$
$$3x+y-2z=4 \quad \ldots\ldots\ (2)$$
$$7x-6y-z=10 \quad \ldots\ldots\ (3)$$

Kita eliminasi variabel *z* dari persamaan (1) dan (2), kemudian persamaan (2) dan (3).

$$\begin{array}{lcl} Persamaan(1)\times 2 & \rightarrow & 2x-4y+2z=12 \\ Persamaan 2 & \rightarrow & \underline{3x+y-2z=4}\ + \\ & & 5x-3y=16 \end{array}$$

$$5x-3y=16 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\begin{array}{lcl} Persamaan(2) & \rightarrow & 3x+y-2z=4 \\ Persamaan(3)\times 2 & \rightarrow & \underline{14x-12y-2z=20}\ - \\ & & -11x+13y=-16 \end{array}$$

$$-11x+13y=-16 \ldots\ldots (5)$$

Langkah 2: Selesaikan SPLDV yang didapat pada langkah 1.

Persamaan (4) dan (5) merupakan SPLDV

$$\begin{cases} 5x-13y=-16 \\ -11x+13y=-16 \end{cases}$$

Eliminasi variabel x pada persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{lcl} Persamaan(4)\times 11 & \rightarrow & 55x-33y=176 \\ Persamaan(5)\times 5 & \rightarrow & \underline{-55x+65y=-80}\ + \\ & & 32y=96 \end{array}$$

$$y=3$$

Eliminasi variabel y pada persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{lcl} Persamaan(4)\times 13 & \rightarrow & 65x-39y=208 \\ Persamaan(5)\times 3 & \rightarrow & \underline{-33x+39y=-48}\ + \\ & & 32x=160 \\ & & x=5 \end{array}$$

Langkah 3: Substitusikan nilai-nilai variabel yang diperoleh pada langkah 2 ke dalam salah satu persamaan semula untuk mendapatkan nilai variabel yang lain.

Substitusikan x = 5 dan y = 3 ke persamaan (1), diperoleh:

$$5-2(3)+z=6$$
$$z=6-1=5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5,3,7)\}$

3) Metode gabungan (eliminasi dan substitusi)

Dalam menentukan himpunan penyelesaian dengan menggunakan metode gabungan, dapat dilakukan dengan menggabungkan langkah-langkah dari metode substitusi dan metode eliminasi.

Contoh1.23

Diketahui sebuah sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x+y-2z=4 \\ 7x-6y-z=10 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas, kita dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1: Eliminasi salah satu variabel atau atau sehingga diperoleh SPLDV.

$$x-2y+z=6 \quad \text{.......} \ (1)$$
$$3x+y-2z=4 \quad \text{.......} \ (2)$$
$$7x-6y-z=10 \quad \text{.......} \ (3)$$

Kita eliminasi variabel *z* dari persamaan (1) dan (2), kemudian persamaan (2) dan (3).

$$\begin{array}{lcl} Persamaan(1)\times 2 & \rightarrow & 2x-4y+2z=12 \\ Persamaan 2 & \rightarrow & \underline{3x+y-2z \quad =4} \; + \\ & & \quad 5x-3y=16 \\ & & 5x-3y=16 \quad \text{.....} \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} Persamaan(2) \rightarrow & & 3x \quad + \quad y - 2z = 4 \\ Persamaan(3) \times 2 & \rightarrow & \underline{14x - 12y - 2z = 20} \; - \\ & & -11x + 13y = -16 \end{array}$$

$$-11x + 13y = -16 \qquad ..... \qquad (5)$$

Langkah 2: Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 1 dengan metode substitusi.

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ -11x + 13y = -16 \end{cases}$$

Nyatakan $5x - 3y = 16$ ke bentuk $x = \frac{3y + 16}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3y}{5} + \frac{16}{5}$

Substitusikan $x = \frac{3y}{5} + \frac{16}{5}$ ke persamaan $-11x + 13y = -16$, diperoleh

$$-11(\frac{3y}{5} + \frac{16}{5}) + 13y = -16$$

$$\Leftrightarrow \frac{-33y}{5} + \frac{-176}{5} + 13y = -16$$

$$\Leftrightarrow \frac{32y}{5} = -16 + \frac{176}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{32y}{5} = \frac{96}{5} \Leftrightarrow \frac{32y}{5} = \frac{96}{5}(5)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{96}{32} = 3$$

Substitusikan y =3 ke persamaan $x = \frac{3y}{5} + \frac{16}{5}$, diperoleh:

$$x = \frac{3(3)}{5} + \frac{16}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Langkah 3: Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah 2 ke salah satu persamaan semula sehingga diperoleh nilai variabel yang ketiga.

Substitusikan y = 3 dan x = 7 ke persamaan $x - 2y + z = 6$, diperoleh:

$$7 - 2(3) + z = 6$$

$$z = 5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5,3,7)\}$

3. Matriks dan Vektor pada Bidang dan Ruang

Definisi 2.1

Matriks adalah susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan pada susunan tersebut disebut entri atau komponen atau elemen dari matriks.

Contoh 2.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} & n & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Ukuran dari matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Matriks pertama pada Contoh 2.1 di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya 3 x 2. Bilangan pertama dari ukuran matriks menyatakan banyaknya baris, sedangkan bilangan kedua menyatakan banyaknya kolom.

Matriks ditulis dengan huruf besar dan skalar ditulis dengan huruf kecil. Skalar-skalar disini merupakan bilangan real. Komponen pada baris ke-i, kolom ke-j ditulis aij atau (A)ij .

Jadi, secara umum matriks mxn ditulis sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_3 & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]$$

Notasi $[a_{ij}]_{m\times n}$digunakan apabila ukuran matriks diperhatikan dan notasi $[a_{ij}]$digunakan apabila ukuran matriksnya tidak diperhatikan.

Jenis-jenis Matriks

Misalkan matriks A = $[a_{ij}]$

(1) Matriks A disebut matriks *persegi* berorder n jika A mempunyai n baris dan n kolom.

Komponen a11, a22, …, ann disebut *komponen diagonal utama* dari A.

(2) Matriks A disebut *matriks segitiga bawah* jika semua komponen di atas diagonal utama nol.

(3) Matriks A disebut *matriks segitiga atas* jika semua komponen di bawah diagonal utama nol.

(4) Matriks A disebut *matriks segitiga* jika matriks A merupakan matriks segitiga atas atau segitiga bawah.

(5) Matriks A disebut *matriks diagonal* jika A merupakan matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah.

(6) Matriks A disebut *matriks skalar* jika A merupakan matriks diagonal dan komponen pada diagonal utama sama.

(7) Matriks A disebut *matriks identitas* jika A merupakan matriks persegi yang semua komponen pada diagonal utama adalah 1 dan komponen lainnya 0.

(8) Matriks A disebut *matriks nol* jika semua komponennya 0. Matriks nol ditulis O. Jika ukuran matriks diperhatikan maka matriks O berukuran pxq ditulis Opxq.

(9) Matriks A disebut *matriks kolom* jika hanya mempunyai satu kolom. Matriks A disebut *matriks baris* jika hanya mempunyai satu baris.

Definisi 2.2

Dua matriks dikatakan *sama* jika kedua matriks tersebut berukuran sama dan komponen yang bersesuaian sama.

Dengan notasi matriks, jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ berukuran sama maka

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i \; dan \; j$

Operasi pada Matriks

Definisi 2.3

Jika A dan B matriks yang berukuran sama, maka jumlah A + B merupakan matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan komponen-komponen matriks A dan B yang bersesuaian.

Matriks yang ukurannya tidak sama tidak dapat dijumlahkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ berukuran sama,maka $[A+B]i_j = ai_j + bi_j, \forall i\, dan\, j.$

Definisi 2.4

Jika A sebarang matriks dan α sebarang skalar, maka *hasil kali scalar* αA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap komponen dari A dengan α. Dalam notasi matriks, jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ maka $(\alpha A)_{i\,j} = \alpha a_{ij}$

Definisi 2.5

Jika $A = (a_{i\,j})$ adalah matriks p x q dan $B = (b_{i\,j})$ matriks q x r maka *hasilkali* AB merupakan matriks berukuran p x r yang komponennya $(AB)_{i\,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$

Definisi perkalian matriks memerlukan syarat banyaknya kolom dari matriks pertama, yaitu A, sama dengan banyaknya baris matriks kedua, yaitu B.

Jika syarat ini tidak dipenuhi maka perkaliannya tidak terdefinisi.

Teorema 2.1

Jika matriks berikut berukuran sedemikian sehingga operasi-operasinya dapat dilakukan dan $A = (a_{i\,j})$ bilangan real maka aturan berikut berlaku.

(1) A + B = B + A	sifat komutatif untuk penjumlahan
(2) A + (B + C) = (A + B) + C	sifat asosiatif untuk penjumlahan
(3) A(BC) = (AB)C	sifat asosiatif untuk perkalian
(4) A(B + C) = AB + AC	sifat distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan
(5) (B + C)A = BA + CA	sifat distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan

(6) $\alpha(B+C) = \alpha B + \alpha C$

(7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(8) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

(9) $\alpha(BC) = (\alpha B)C = \beta)A = B(\alpha C)$

Bukti (4)

Misalkan $A = \lfloor ai_j \rfloor_{p\times q}, B = \lfloor bi_j \rfloor_{q\times r}, C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{q\times r}$

Akan ditunjukkan komponen yang bersesuaian dari A(B + C) dan AB + AC adalah sama; yaitu (A(B + C))ij = (AB + AC)ij untuksetiapi dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan dan perkalian matriks diperoleh

$$
\begin{aligned}
(A(B+C))_{i\,j} &= \sum_{i=1}^{q}(A)_{ik}(B+C)_{kj} \\
&= \sum_{i=1}^{q}(A)_{ik}((B)_{kj}+C)_{kj}) \\
&= \sum_{i=1}^{q}(A)_{ik}(B)_{kj}+(A)_{ik}(B)_{kj} \\
&= \sum_{i=1}^{q}(A)_{ik}(B)_{kj}+\sum_{i=1}^{q}(A)_{ik}(B)_{kj} \\
&= (AB)_{ij}+(AC)_{ij} \\
Jadi A(B+C) &= AB+AC
\end{aligned}
$$

Bagian lain teorema ini diserahkan buktinya kepada pembaca.

Matriks AB dan BA tidak sama karena tiga alasan.

Pertama, AB terdefinisi tetapi BA tidak terdefinisi. Sebagai contoh jika A dan B berturut-turut berukuran 2x3 dan 3x3 maka AB terdefinisi tetapi BA tidak terdefinisi.

Kedua, AB dan BA keduanya terdefinisi tetapi ukurannya berbeda. Sebagai contoh jika A dan B berturut-turut berukuran 2x3 dan 3x2 maka AB berukuran 2x2 dan BA berukuran 3x3.

Ketiga, AB≠BA meskipun AB dan BA terdefinisi dan berukuran sama. Sebagai contoh

Untuk $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ diperoleh $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Invers Matriks

Definisi 2.6

Jika A matriks persegi dan terdapat matriks B sedemikian sehingga AB = BA = I, maka A dikatakan invertibel dan B dikatakan *invers* A.

Jika A invertibel, maka inversnya dinyatakan dengan symbol A^{-1}

Contoh 2.2

Matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ karena AB = I dan BA = I.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ tidak invertibel karena untuk sebarang matriks B berukuran 3 x 3 kolom ketiga dari BA adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sehingga BA≠I.

Teorema berikut ini menunjukkan ketunggalan invers matriks.

Teorema 2.2

Jika B dan C keduanya merupakan invers dari matriks A, maka B = C.

Bukti teorema ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 2.3

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertibel jika ad – bc ≠ 0 dan $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Bukti

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ dan AB=BA=I

Karena AB = I maka $\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jadi, $\begin{cases} ap + br = 1 \\ cp + dr = 0 \end{cases}$ dan $\begin{cases} aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{cases}$

Dengan menyelesaikan persamaan (1), diperoleh solusi $p = \dfrac{d}{ad - bc}$ dan $r = \dfrac{-c}{ad - bc}$

Dengan cara serupa, solusi persamaan kedua (2) adalah $q = \dfrac{-b}{ad - bc}$ dan $s = \dfrac{-c}{ad - bc}$

Akibatnya, $B = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Jadi, Jika B memenuhi AB = BA = I maka $ad - bc \neq 0$.

Akibatnya, matriks B merupakan invers of A. Jadi, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Teorema 2.4

Jika A dan B mariks invertibel berukuran sama, maka

(1) AB invertibel

(2) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Hasilkali matriks invertibel adalah invertibel dan invers hasilkali sama dengan hasilkali inversnya dengan urutan yang dibalik.

Definisi 2.7

Jika A matriks persegi, maka didefinisikan pangkat bulat non-negatif dari A, $A^0 = I \underbrace{A.A.A...A}_{n\ faktor}(n > 0)$

Jika A invertibel, maka didefinisikan pangkat bulat negatif dari A

$A^{-n} = (A^{-1})^n, (n > 0)$

Teorema 2.5

Jika A matriks persegi dan r dan s bilangan bulat, maka $A^r A^s = A^{r+s}\ dan\ (A^r)^s = A^{rs}$

Bukti untuk latihan.

Teorema 2.6

Jika A matriks invertibel, maka:

(1) A^{-1} invertibel dan $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) A^n invertibel dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n\ untuk n = 0,1,2,3,....$

(3) Untuk sebarang skalar tak-nol k, matriks kA invertibel dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Bukti

(1) Karena $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ maka matrik A^{-1} invertible dan $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) Sebagai latihan

(3) $(kA)\frac{1}{k}A^{-1} = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = (\frac{1}{k}k)AA^{-1} = I.I = I$ dengan cara serupa diperoleh $(\frac{1}{k}A^{-1})(kA) = I$ jadi $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Transpos Matriks

Definisi 2.8

Jika A matriks p x q, maka *transpo*s A, ditulis A^T, didefinisikan sebagai matriks q x p yang diperoleh dari menukar baris dan kolom A, yaitu kolom pertama dari A^T merupakan baris pertama matriks A, kolom kedua dari A^T merupakan baris kedua dari A, dan seterusnya.

Teorema berikut ini merupakan sifat utama dari tranpos.

Teorema 2.7

Jika ukuran matriks sedemikian sehingga operasi berikut ini dapat dilakukan, maka:

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA^T) = k(A^T)$, dengan k sebarang skalar.

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

Definisi 2.9

Suatu matriks n x n disebut *matriks elementer* jika dapat diperoleh dari matriks identitas In berukuran nxn dengan melakukan satu operasi baris elementer.

Contoh 2.3

$E_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ kalikan baris pertama dari dengan -3,

$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ menukar baris pertama dan kedua dari .

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tambahkan 3 kali baris ketiga ke baris pertama dari .

Matriks-matriks E_1, E_2, E_3 merupakan matriks-matriks elementer.

Teorema 2.8

Jika matriks A dikalikan dari kiri dengan matriks elementer E, maka hasilnya EA adalah matriks A yang dikenai operasi baris elementer yang sama dengan operasi baris elementer yang dikenakan pada I untuk mendapatkan E. Bukti ditinggalkan untuk pembaca sebagai latihan.

Jika operasi baris elementer dikenakan pada matriks identitas I untuk menghasilkan matriks elementer E, maka terdapat operasi baris kedua sehingga ketika dikenakan ke E menghasilkan I kembali.

Teorema 2.9

Setiap matriks elementer adalah invertibel dan inversnya merupakan matriks elementer.

Teorema 2.10

Jika A matriks nxn , maka pernyataan berikut ekivalen.

(1) A invertibel.
(2) AX = 0 hanya mempunyai penyelesaian trivial.
(3) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah In.
(4) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks elementer.

Contoh 2.4

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \sim \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \sim \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 + 3R_3 \\ R_2 - 3R_3 \\ -R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) R_1 - 2R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Jadi, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Perhatikan matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) R_3 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Karena diperoleh baris nol pada bagian kiri maka B tidak invertibel.

Teorema 2.11

Setiap SPL mempunyai penyelesaian tunggal atau mempunyai tak-hingga penyelesaian atau tidak mempunyai penyelesaian.

Teorema 2.12

Jika A mariks n x n yang invertibel, maka untuk setiap matriks b berordo nx1, sistem persamaan Ax = b mempunyai tepat satu penyelesaian, yaitu

Bukti ditinggalkan untuk pembaca sebagai latihan.

Berikut ini disajikan contoh penggunaan invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Contoh 2.5

Pandang SPL berikut

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$

$x_1 + 8x_3 = 17$

Dalam bentuk matriks SPL di atas dapat ditulis sebagai *Ax* = *b*, dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Telah ditunjukkan pada Contoh 2.4 bahwa A invertibel dan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Akibatnya,

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

atau *x1* = 1, *x2* = -1, *x3* = 2.

Jadi, penyelesaian dari SPL tersebut adalah (1, -1, 2).

4. Program Linear

Program linear merupakan bagian dari Operation Research yang mempelajari masalah optimum. Prinsip pada program linear diterapkan dalam masalah nyata diantaranya dalam bidang ekonomi, kesehatan, pendidikan, perdagangan, transportasi, industri, sosial, dan lain-lain. Menurut Winston (1993), masalah program linear adalah masalah optimasi dalam hal sebagai berikut:

a. Usaha untuk memaksimalkan (atau meminimalkan) fungsi linear dari sejumlah variabel keputusan. Fungsi yang dimaksimalkan atau diminimalkan disebut fungsi tujuan/fungsi objektif.
b. Nilai variabel keputusan harus memenuhi sejumlah pembatas/kendala. Setiap pembatas/kendala harus dalam bentuk persamaan linear atau pertidaksamaan linear.
c. Nilai pada setiap variabel dibatasi. Untuk setiap variabel x_i, tanda batasnya nonnegatif atau x_i boleh tidak dibatasi tandanya.

Selain itu, menurut Barnett (1993), masalah program linear adalah masalah yang berkaitan dengan upaya menemukan nilai optimal (nilai maksimum atau minimum) dari fungsi tujuan (yang merupakan fungsi linear dalam bentuk $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, dengan variabel keputusan $x_1, x_2, ..., x_n$ tergantung pada kendala/pembatas masalahyang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linear. Kendala/pembatas masalah disebut sebagai fungsi kendala/pembatas (*constraints function*), Variabel keputusan pada masalah program linear harus bernilai non negative $x_1 \geq 0, i = 1, 2, ..., n$, Himpunan titik-titik yang memenuhi fungsi kendala dan persyaratan variabel keputusan (nonnegatif) disebut sebagai daerah penyelesaian fisibel *(feasible region*). Sebarang titik pada daerah penyelesaian fisibel yang menghasilkan nilai optimum (maksimum atau minimum) fungsi tujuan disebut sebagai penyelesaian optimum.

Penerapan masalah program linear dalam berbagai bidang kehidupan dapat diselesaikan dengan mengubahnya menjadi bentuk model matematika. Perhatikan Contoh 3.1 berikut ini.

Contoh 3.1.

Rafa sangat senang makan steak dan keripik kentang. Mulai saat ini Rafa mengurangi konsumsi makannya terutama steak dan keripik kentang. Rafa menyadari bahwa ia melakukan diet yang tidak sehat. Oleh karena itu, Rafa mengunjungi ahli gizi untuk meyakinkan dirinya bahwa makanan yang ia makan (steak dan keripik kentang) memenuhi persyaratan gizi. Informasi kebutuhan gizi yang terkandung dalam steak dan keripik kentang (per gram) penyajiannya beserta harganya disajikan dalam Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 4 Informasi kebutuhan gizi pada steak dan keripik kentang (per gram)

Kandungan	Kandungan Per Penyajian (gram)		Persyaratan Kebutuhan Harian (gram)
	Steak	Keripik Kentang	
Karbohodrat	5	15	≥ 50
Protein	10	5	≥ 40
Lemak	15	2	≤ 60
Harga per penyajian	4	2	

Rafa ingin menentukan banyaknya kebutuhan harian steak dan keripik kentang yang dapat dimakannya (boleh dalam bentuk pecahan) sehingga pengeluarannya minimum.

Untuk dapat memperoleh banyaknya steak dan keripik kentang (dalam gram) yang boleh dimakan Rafa maka masalah di atas haruslah diubah ke dalam bentuk model matematika. Model matematika memuat fungsi tujuan dan fungsi kendala. Menurut Suyitno (2014), langkah-langkah untuk membuat model matematika adalah sebagai berikut:

a. Menentukan tipe masalah (maksimum atau minimum).

b. Mendefinisikan variabel keputusan.

c. Merumuskan fungsi tujuan.

d. Merumuskan fungsi kendala.

e. Menentukan persyaratan nonnegatif.

Langkah-langkah tersebut diterapkan pada contoh di atas, diperoleh:

a. Tipe masalah adalah minimum.

b. Variabel keputusannya adalah:

$x =$ banyaknya steak yang dimakan (dalam gram),

$y =$ banyaknya keripik kentang yang dimakan (dalam gram)

c. Fungsi tujuannya adalah $z = 4x + 2y$

d. Fungsi kendalanya adalah $\begin{array}{r} 5x + 15y \geq 50 \\ 10x + 5y \geq 40 \\ 15x + 2y \leq 60 \end{array}$.

e. Persyaratan non-negatifnya adalah $x, y \geq r$

Jadi model matematikanya adalah Min: $z = 4x + 2y$

Harus memenuhi (h.m): $\begin{array}{r} 5x + 15y \geq 50 \\ 10x + 5y \geq 40 \\ 15x + 2y \leq 60 \end{array}$.

Bentuk baku model matematika suatu program linear untuk masalah maksimum adalah sebagai berikut.

$$\text{Maks } z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$$

$$\text{h.}m: \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

Keterangan:

$x_1, x_2, ..., x_n$ merupakan variabel keputusan.

$c_1, c_2, ..., c_n$ merupakan kontribusi setiap variabel keputusan terhadap fungsi tujuan, disebut pula sebagai koefisien fungsi tujuan suatu model matematika.

$x_1, x_2, ..., x_n$ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ merupakan penggunaan setiap unit sumber daya dari setiap variabel keputusan yang terbatas, disebut pula koefisien fungsi kendala model matematika.

$b_1, b_2, ..., b_n$ merupakan banyaknya ketersediaan sumber daya untuk dimanfaatkan sepenuhnya, disebut pula nilai ruas kanan fungsi kendala.

Perhatikan masalah berikut ini.

Seorang petani memiliki lahan 200 hektar dan ingin menanaminya dengan kentang atau labu kuning atau kombinasi keduanya. Dia melihat ada pasar untuk kedua tanaman ini dan tidak ingin menanam tanaman lainnya. Hasil maksimal panen kentang adalah 5 ton per hektar, dan jika labu kuning yang ditanam maka hasil panennya hanya 3 ton per hektar. Kentang dijual dengan keuntungan 50 poundsterling per ton sedangkan keuntungan labu kuning adalah 105 per ton. Kentang yang dipanen maksimal 750 ton dan labu kuning maksimal 300 ton per tahun untuk dijual bebas di pasar. Kedua benih akan membutuhkan pupuk dan rasio untuk setiap benih yang tumbuh memiliki batas mengenai pupuk yang tersedia. Petani menggunakan dua jenis pupuk, A dan B, yang dicampur dalam proporsi yang tepat untuk setiap benih. Dia percaya bahwa campuran untuk kentang seharusnya terdiri dari 40% pupuk A dan 60% pupuk B. Campuran untuk labu harus terdiri dari 55% pupuk A dan 45% pupuk B. Setiap hektar tanaman kentang membutuhkan 0,4 ton pupuk dan setiap hektar tanaman labu membutuhkan 0,5 ton pupuk. Ada batasan jumlah pupuk yang tersedia. Petani dapat membeli hingga 30 ton pupuk A dan 100 ton pupuk B. Pupuk A berkualitas lebih baik. Petani bisa meningkatkan kualitas B dengan menambahkan bahan-bahan tambahan. Jika dia melakukannya, semakin baik ton B dapat digunakan sebagai suplemen parsial atau total untuk 40% dari A yang diperlukan dalam campuran kentang. Namun, petani memperkirakan bahwa ini akan menyebabkan penurunan 10% dalam hasil. Penggunaannya tidak mungkin pada campuran labu karena hasilnya akan bencana. Untuk setiap ton pupuk B yang akan ditingkatkan dengan cara ini 0,1 ton diperlukan komponen tambahan, dengan biaya tambahan 45 pound. Silahkan dicoba membuat model matematika untuk memaksimalkan keuntungan petani!.

Nah, rekan-rekan mahasiswa sekalian. Kalian telah mempelajari konsep dasar program linear. Selanjutnya, kita akan membahas bagaimana menyelesaikan masalah program linear. Pada pembahasan di bawah ini, kita akan belajar menyelesaikan program linear menggunakan metode grafik. Selamat Belajar.

2. Metode Grafik

Untuk menyelesaikan masalah program linear yang melibatkan 2 variabel dan 2 atau lebih pertidaksamaan maka digunakan metode grafik. Metode grafik ini dibedakan 2 yaitu metode titik ekstrim (titik pojok) dan metode garis selidik. Sebelum membahas kedua metode tersebut, alangkah baiknya kita kenali istilah-istilah dan teorema-teorema berikut ini.

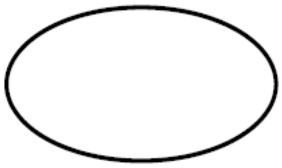
Menurut Dantzig dan Thapa (1997), **daerah penyelesaian fisibel** (*the feasible region*) atau disingkat DPF adalah himpunan titik-titik yang memenuhi semua fungsi kendala. Sedangkan Winston (1993) menyatakan daerah penyelesaian fisibel suatu program linear adalah himpunan semua titik yang memenuhi semua pembatas dan semua tanda batas program linear. Untuk masalah maksimum, penyelesaian optimalnya merupakan titik pada daerah penyelesaian fisibel yang menyebabkan nilai fungsi tujuan terbesar. Demikian pula untuk masalah minimum, penyelesaian optimalnya adalah titik pada daerah penyelesaian fisibel yang menyebabkan nilai fungsi tujuan terkecil.

Sebelum berbicara tentang titik ekstrim, mari kita definisikan terlebih dahulu himpunan konveks.

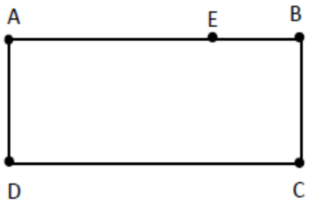
Definisi 3.1 himpunan konveks

“S merupakan himpunan titik-titik. S disebut himpunan konveks jika ruas garis yang menghubungkan sebarang titik di S berada di dalam S”

Perhatikan Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 di bawah ini.



Gambar 3.1Elips



Gambar 3.2 Persegi panjang

Gambar 12 dan Gambar 13 merupakan himpunan konveks.

Apakah rekan-rekan mahasiswa sudah paham himpunan konveks? Jika sudah paham, mari kita definisikan titik ekstrim.

Definisi 3.2 Definisi titik ekstrim

Pada sebarang himpunan konveks S, titik P di S disebut sebagai titik ekstrim jika setiap ruas garis yang berada di dalam S dan memuat titik P maka P merupakan titik akhir (ujung) dari ruas garis tersebut.

Berdasarkan definisi titik ekstrim, Gambar 3.1 memiliki tak hingga banyaknya titik ekstrim. Sedangkan pada Gambar 3.2 hanya ada 4 titik ekstrim yaitu titik A, titik B, titik C, dan titik D. Titik E bukan titik ekstrim. Mengapa? Karena ada ruas garis AB dan memuat titik E, namun titik E tidak berada di ujung ruas garis AB. Titik ekstrim biasanya berada di pojok sehingga disebut pula titik pojok. Menurut Barnett (1993), titik pojok daerah penyelesaian adalah titik pada daerah penyelesaian yang merupakan perpotongan dua garis pembatas. Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear disebut tertutup jika daerahnya tertutup dalam lingkaran. Jika tidak tertutup dalam lingkaran disebut tidak tertutup (terbuka).

Teorema 3.1 Teorema Fundamental Program Linear

a. Jika nilai optimal fungsi tujuan masalah program linear ada maka nilai tersebut dihasilkan oleh satu atau lebih titik pojok pada daerah penyelesaian fisibel.
b. Jika masalah program linear mempunyai penyelesaian tidak tunggal, sedikitnya satu dari penyelesaiannya berada pada titik pojok daerah penyelesaian fisibel.

Bukti Teorema ditinggalkan karena di luar cakupan materi ini.

Teorema 3.2 Teorema Eksistensi Penyelesaian Masalah Program Linear

a. Jika daerah penyelesaian fisibel masalah program linear tertutup maka nilai maksimum dan nilai minium fungsi tujuan ada.
b. Jika daerah penyelesaian fisibel masalah program linear tidak tertutup dan koefisien fungsi tujuan bernilai positif maka nilai minimum fungsi tujuan ada tetapi nilai maksimumnya tidak ada.
c. Jika daerah penyelesaian fisibel masalah program linear kosong (artinya tidak ada titik yang memenuhi semua fungsi kendala) maka nilai maksimum dan nilai minimum fungsi tujuan tidak ada.

Perhatikan Contoh 3.2 berikut ini.

Contoh 3.2.

Diberikan model matematika sebagai berikut.

Maks $z = 250x + 30y$

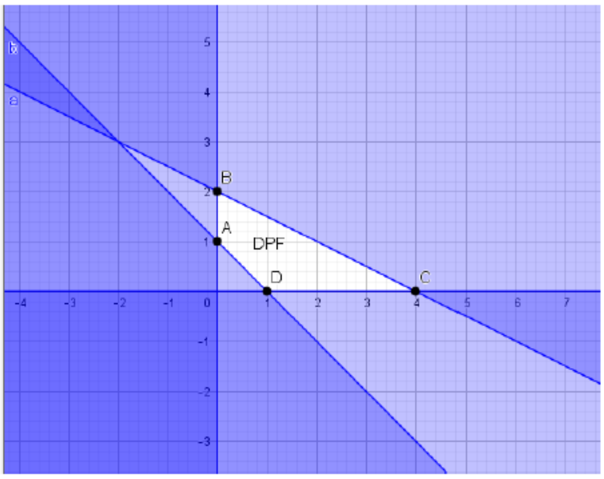
$$\begin{array}{ll} & x + 2y \leq 4 \\ \text{h.m} & x + y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Selesaikan model matematika di atas dengan metode titik ekstrim.

Penyelesaian:

a. Menggambar garis yang persamaannya $x + 2y = 4$ dan $x + y = 1$
b. Mengarsir daerah yang tidak memenuhi $x + 2y \leq 4; x + y \geq 1; x \succ 0, y \geq 0$
c. Daerah Penyelesaian Fisibel (DPF) nya adalah daerah yang dibatasi segiempat ABCD dengan titik ektrim A, B, C, dan D. $A(0,1), B(0,2), C(4,0), dan D(1,0)$

Untuk menggambar daerah penyelesaian fisibel (DPF) lebih mudah menggunakan aplikasi Geogebra. Gambar 3.3 di bawah ini merupakan DPF contoh 3.2 yang digambar menggunakan aplikasi Geogebra.



Gambar 14. DPF penyelesaian contoh 3.2

d. Membandingkan nilai Z dari titik ekstrim untuk menentukan penyelesaian optimal. Perhatikan Tabel 3.2 berikut ini.

Tabel 3.2 Perbandingan Nilai Z dari titik ekstrim O, A, B, C

Titik	$Z = 250x + 30y$
A (0,1)	250.0+30.1=30
B (0,2)	250.0+30.2=60
C (4,0)	250.4+30.0=1000 (maks)
D (1,0)	250.1+30.0=250

e. Jadi penyelesaian optimalnya adalah x = 4, y = 0 atau (4, 0) dengan Z maksimalnya = 1000.

Metode grafik yang kedua adalah metode garis selidik. Daerah penyelesaian fisibel sudah digambarkan, mencari nilai optimal (maks atau min) dapat pula dicari tanpa harus membandingkan nilai fungsi tujuan dari titik-titik ekstrim (pojok). Bagaimana caranya? Kita dapat menggunakan garis selidik. Garis selidik adalah garis-garis yang sejajar dengan garis pada fungsi tujuan. Untuk masalah maksimum, garis selidik itu disebut **isoprofit lines**, sedangkan untuk masalah minimum disebut **isocost lines.** Langkah-langkah menentukan nilai optimal dari fungsi tujuan $\mathrm{z : ax + by}$ menggunakan metode garis selidik adalah sebagai berikut.

a. Menggambar DPF.

b. Menggambar garis yang persamaannya $ax + by = 0$

c. Menggambar garis-garis yang sejajar dengan $ax + by = 0$ dan melalui titik ekstrim. Garis sejajar ini disebut garis selidik.
d. Untuk masalah maksimum maka titik ekstrim terakhir yang dilalui garis selidik berkaitan dengan penyelesaian optimal. Sedangkan untuk masalah minimum, titik ekstrim pertama yang dilalui garis selidik berkaitan dengan penyelesaian optimal.

Contoh 3.3.

Selesaikan model matematika berikut ini dengan metode garis selidik.

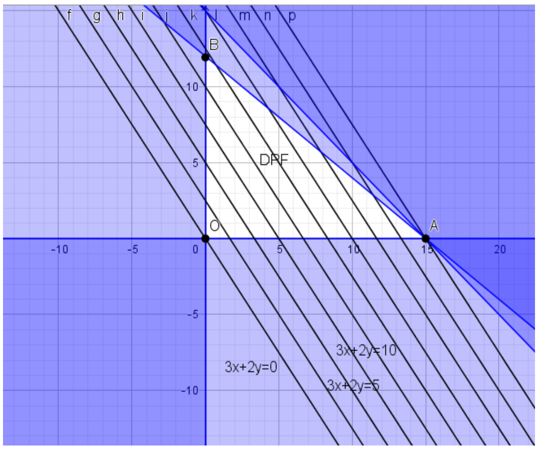
Maks $z = 3x + 2y$

$$\text{h.m} \quad \begin{aligned} 4\text{x} + 5\text{y} &\leq 60 \\ 2\text{x} + 2\text{y} &\geq 30 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Jawab:

a. Menggambar DPF. DPFnya adalah daerah yang dibatasi oleh segitiga OAB dengan titik ekstrim O .
b. Menggambar garis yang persamaannya $3x + 2y = 0$.
c. Menggambar garis-garis yang sejajar dengan dan melalui titik ekstrim, misalnya $3x + 2y = 5$, $3x + 2y = 10$ $3x + 2y = 15$ dan sebagainya. Garis-garis ini disebut garis selidik.
d. Karena masalahnya maksimum, maka titik ekstrim terakhir yang dilalui garis selidik berkaitan dengan penyelesaian optimal. Titik ekstrim terakhirnya adalah A= (15,0) sehingga A=(15, 0)berkaitan dengan penyelesaian optimal.
e. $Z = 3(15) + 2(0) = 45$. Penyelesaian optimalnya adalah (15,0) dengan nilai maksimum 45.

Perhatikan Gambar 3.4 berikut ini.



Gambar 15 Penyelesaian soal pada contoh 3.3 menggunakan garis selidik

Apakah mungkin ditemukan bahwa nilai optimum (maksimum maupun minimum) dapat terjadi di lebih dari 2 titik? Apakah mungkin, kita tidak dapat menemukan nilai optimumnya? Ternyata, terdapat beberapa kasus program linear. Yaitu penyelesaian tidak tunggal (*multiple optimal solution*), ketidaklayakan (*infeasible solution*), kelebihan pembatas (*redundant constraint*), dan penyelesaian tidak terbatas (*unbounded solution*). Mari kita bahas satu persatu.

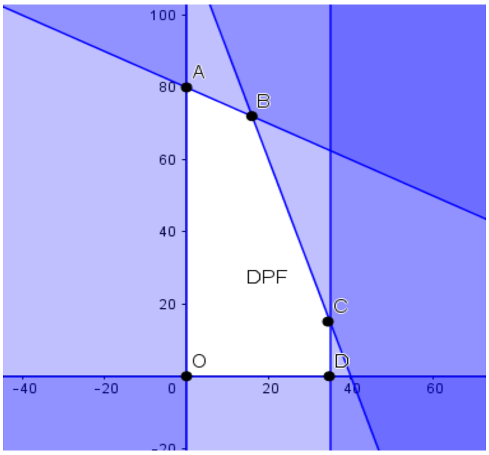
Kasus yang pertama adalah penyelesaian tidak tunggal. Terkadang kita jumpai ada model matematika yang nilai optimalnya tidak hanya di satu titik ekstrim namun juga terjadi di titik-titik lainnya. Perhatikan contoh 3.4 berikut ini.

Contoh 3.4.

Maks $z = 18x + 6y$

$$\text{h.m} \quad \begin{aligned} &3x + y \le 120 \\ &x + 2y \le 160 \\ &x \le 35 \\ &\quad x \ge 0, \\ &\quad y \ge 0 \end{aligned}$$

Gambar DPF nya disajikan pada Gambar 3.5 berikut.



Gambar 16. DPF Contoh soal 3.4

DPFnya adalah daerah yang dibatasi segilima OABCD dengan titik ekstrim

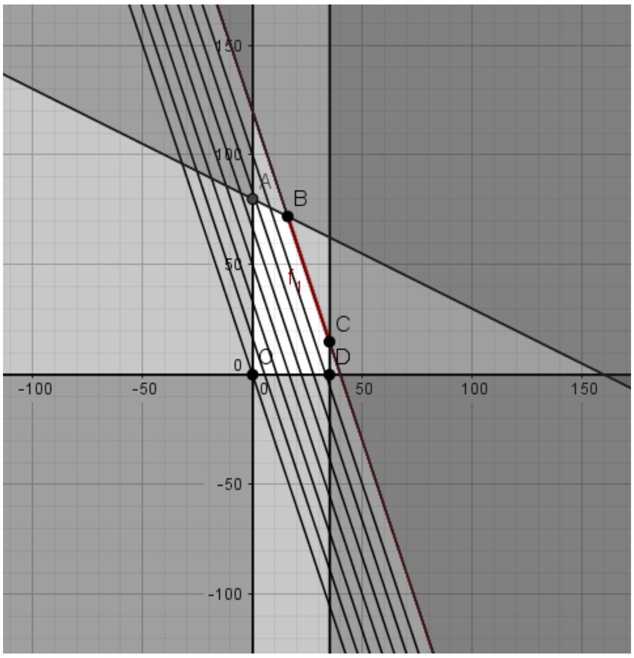
$$O=(0,0), A=(0,80), B=(16,72), C=(35,15), dan D=(35,0)$$

Membandingkan nilai fungsi tujuan titik-titik ekstrim disajikan dalam Tabel 3.3 berikut ini.

Tabel 3.3 Nilai Fungsi Tujuan Contoh soal 3.4

Titik ekstrim	$Z = 18x + 6y$
$O = (0,0)$	$Z = 18.0 + 6.0 = 0$
$A = (0,80)$	$Z = 18.0 + 6.80 = 480$
$B = (16,72)$	$Z = 18.16 + 6.72 = 720$
$C = (35,15)$	$Z = 18.35 + 6.15 = 720$
$D = (35,0)$	$Z = 18.35 + 6.0 = 630$

Berdasarkan Tabel 3.3 di atas kita dapatkan 2 titik yang memberikan nilai maksimum yaitu titik B dan C. Muncul pertanyaan, apakah ada titik lain yang juga memberikan nilai maksimum 720? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita gunakan metode garis selidik. Perhatikan Gambar 3.6 berikut ini.



Gambar 17. Menyelesaikan Contoh soal 3.4 menggunakan metode garis selidik.

Berdasarkan garis selidik, titik ekstrim terakhir yang berkaitan dengan penyelesaian optimal adalah titik B dan C. Terlihat pula bahwa garis selidik terakhir berimpit dengan ruas garis BC. Sehingga titik-titik selain titik B dan C pada ruas garis BC juga berkaitan dengan penyelesaian optimal. Jadi penyelesaian optimalnya adalah

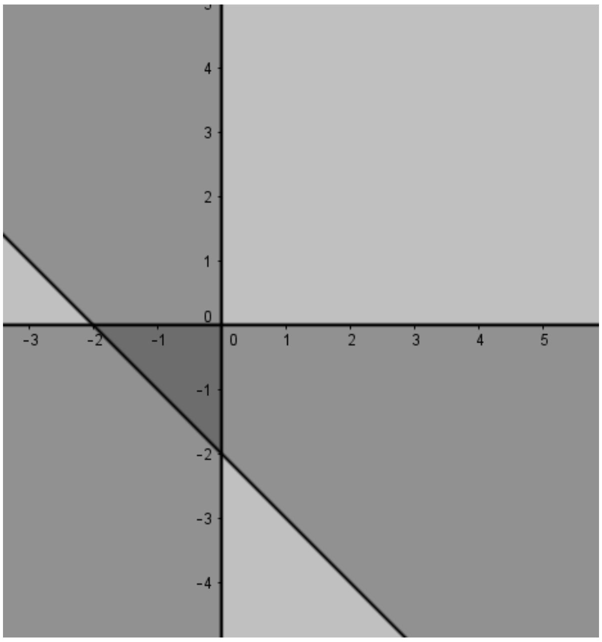
$(x_0, y_0) \in \{(x, y) \mid 3x + 2y = 120, 16 \le x \le 35\}$. Nilai optimalnya adalah 720.

Kasus kedua adalah ketidaklayakan. Perhatikan Contoh 3.5 berikut ini.

Min $z = x + y$

$$\text{h.m} \quad \begin{aligned} &x + y \le -2 \\ &x \ge 0, \\ &y \ge 0 \end{aligned}$$

Gambar DPFnya disajikan pada Gambar 3.7 sebagai berikut.



Gambar 18. DPF Contoh 3.5

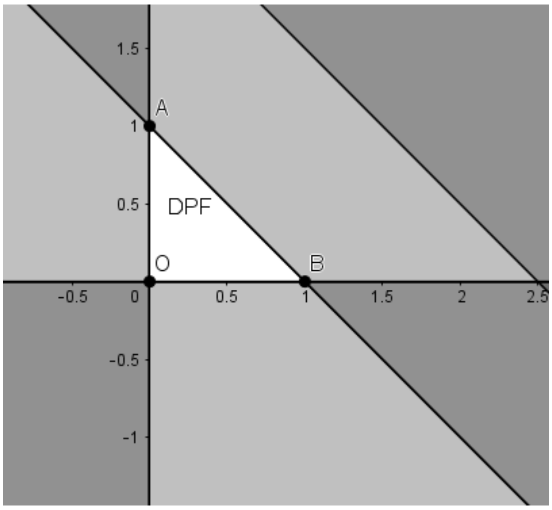
Berdasarkan Gambar 3.7 di atas, tidak ada daerah penyelesaian fisibel sehingga disebut ketidaklayakan. Penyelesaian optimalnya adalah himpunan kosong.

Kasus ketiga adalah kelebihan pembatas. Karakteristiknya adalah adanya kendala tambahan yang tidak mempengaruhi DPF sehingga penyelesaian optimalnya tidak berubah. Perhatikan Contoh 3.6 berikut ini.

Contoh 3.6.

Min $z = 2x + 5y$

$$\text{h.m} \quad \begin{aligned} x + y &\le 1 \\ 2x + 2y &\le 5 \\ x &\le 3 \\ x &\le 5 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$



Gambar 19. Penyelesaian Contoh 3.6

Berdasarkan Gambar 3.8 di atas, terlihat bahwa DPFnya adalah daerah yang dibatasi segitiga OAB dengan titik ekstrim $O = (0,0), A = (0,1), B = (1,0),$. Nilai minimumnya 0 dengan penyelesaian optimalnya $O = (0,0)$. Perhatikan gambar, ada tidaknya fungsi kendala $2x + 2y = 5$ tidak mempengaruhi DPF. Oleh karena itu kasus ini disebut kelebihan pembatas.

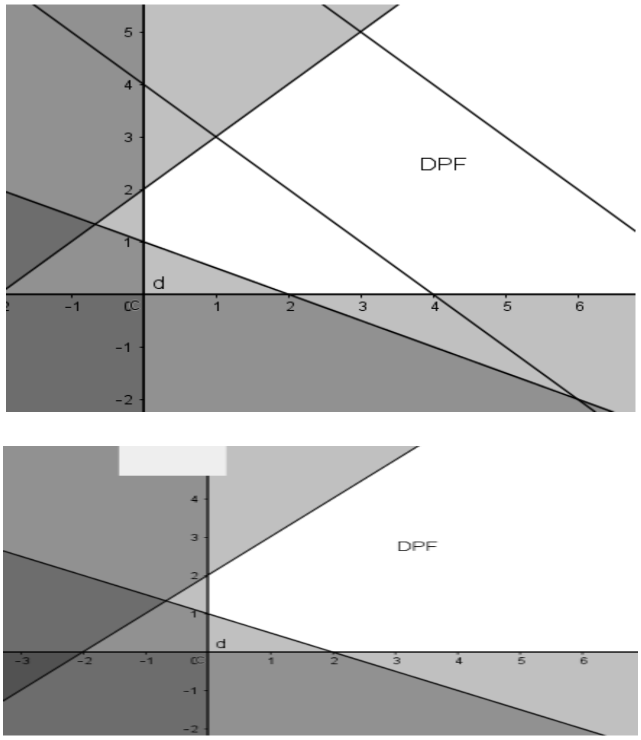
Kasus keempat adalah penyelesaian tidak terbatas. Kasus ini dibedakan menjadi 2 yaitu nilai Z yang tidak terbatas dan penyelesaian optimal yang tidak terbatas. Untuk nilai Z yang tidak terbatas, karakteristik nya adalah ketika kita menggunakan garis selidik maka garis tersebut tidak pernah bertemu dengan titik ekstrim. Ketika garis-garis selidik $ax + by = k_1, k_2, k_3, \ldots dst$ dibuat untuk menemukan penyelesaian optimal maka nilai k semakin membesar dan tidak pernah bertemu dengan titik ekstrim. Perhatikan Contoh 3.7 berikut ini.

Contoh 3.7.

Maks $z = x + y$

$$
\text{h.m} \quad \begin{aligned} -x + y &\le 2 \\ x + 2y &\ge 2 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}
$$

Perhatikan gambar DPF pada Gambar 3.9 di bawah ini. DPFnya terbuka. Koefisien fungsi tujuan positif. Berdasarkan Teorema 3.2 yaitu Teorema Eksistensi Penyelesaian Masalah Program Linear maka nilai maksimumnya tidak ada. Jika dicek menggunakan garis selidik, garis selidik tersebut tidak pernah bertemu dengan titik ekstrim. Nilai Z semakin membesar. Jadi Contoh 3.7 merupakan kasus penyelesaian tidak terbatas (dalam hal ini Z tidak terbatas).



Gambar 20. Kasus penyelesaian tidak terbatas (dalam hal ini Z tidak terbatas)

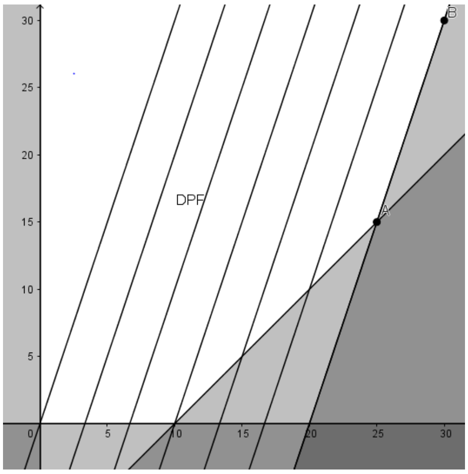
Penyelesaian tidak terbatas selanjutnya adalah penyelesaian optimal (PO) tidak terbatas. Perhatikan Contoh 3.8 berikut ini.

Contoh 3.8.

Maks $z = 30x - 10y$

$$\begin{array}{ll} & x - y \le 10 \\ \text{h.m} & 3x - y \le 60 \\ & x \ge 0 \\ & y \ge 0 \end{array}$$

Gambar DPF disajikan pada Gambar 3.10 sebagai berikut.



Gambar 21. DPF Contoh 3.8

Dengan menggunakan garis selidik, ternyata garis selidik berimpit dengan $3x - y \leq 60$. Titik $A = (25{,}15)$ berkaitan dengan penyelesaian optimal. Nilai Z maksimumnya adalah $30.25 - 10.15 = 600$Titik $B = (30{,}30)$ berada pada garis $3x - y = 60$. Sehingga titik B berkaitan dengan penyelesaian optimal. Nilai Z maksimumnya adalah $30.25 - 10.15 = 600$. Apakah masih ada titik lain yang memberikan Z = 600? Ya ternyata ada. Titik lain tersebut berada pada sinar garis AB yaitu $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \mid 3x - y = 60, x \geq 25\}$. Titik pada sinar garis AB tersebut sangat banyak dan memberikan nilai Z yang sama yaitu 600. Oleh karena itu, Contoh 3.8 ini merupakan kasus penyelesaian tidak terbatas yaitu PO yang tidak terbatas.

D. Rangkuman

1. Untuk mendapatkan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel dilakukan prosedur sebagai berikut.
   (1) Tambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
   (2) Kurangkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
   (3) Kalikan atau bagi kedua ruas dengan bilangan positif yang sama.
   (4) Jika mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik.
2. Menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel dengan cara sebagai berikut.
   (1) Ubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan. Gambar garis l yang persamaannya $ax + by = c$ (putus-putus jika tanda $<$ atau $>$, tidak putus-putus jika tandanya $\leq$ atau $\geq$).
   (2) Ambil titik uji P yang tidak berada pada garis l dan cek apakah memenuhi pertidaksamaan. Jika titik *P* memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) yang memuat P . Jika titik *P* tidak memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) di sisi lain garis l .
   (3) Arsir daerah yang tidak memenuhi pertidaksamaan.
   (4) Himpunan penyelesaiannya dalam gambar berupa daerah sehingga disebut dengan daerah penyelesaian.
3. Ada beberapa carayang sering digunakan untuk menentukan solusi dari suatu SPL, seperti **metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan metode gabungan (eliminasi dan substitusi)**.
4. Jika matriks berikut berukuran sedemikian sehingga operasi-operasinya dapat dilakukan dan $A = (a_{ij})$ bilangan real maka aturan berikut berlaku.
   (1) A + B = B + A — sifat komutatif untuk penjumlahan
   (2) A + (B + C) = (A + B) + C — sifat asosiatif untuk penjumlahan
   (3) A(BC) = (AB)C — sifat asosiatif untuk perkalian
   (4) A(B + C) = AB + AC — sifat distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan

(5) (B + C)A = BA + CA sifat distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan

(6) $\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$

(7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(8) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

(9) $\alpha(BC) = (\alpha B)C = \beta)A = B(\alpha C)$

5. Program linear merupakan bagian dari Operation Research yang mempelajari masalah optimum. Langkah-langkah penyelesaian masalah program linear yaitu:
   (1) ubah masalah verbal menjadi model matematika
   (2) tentukan daerah penyelesaian
   (3) tentukan nilai fungsi tujuan di titik-titik ekstrem daerah penyelesaian
   (4) tentukan nilai optimum fungsi tujuan.